数理解析研究所講究録
920巻 1995年 185-193



21.

# 初等解を持つある2階線形常微分方程式について

吉田 章宏 (上智大学大学院)

## 21.1 はじめに

数式処理システムを利用して2階線形常微分方程式の初等解を求めるアルゴリズムとして、Kovacic のアルゴリズム [2] が知られています。私は、

$$y'' - ry = 0 \quad r \in \mathbf{C}[x]$$

という2階線形常微分方程式において、初等解を持つ場合を具体的に詳しく調べています。この場合には、Rehm [3] の論文がありますが、$\deg(r) = 2$ の場合しか考えていません。また、Setoyanagi [4] の論文では、$r = ax^p + bx^q$, $p > q$の場合を考察しています。今回は、

$$y'' - ry = 0 \quad r \in \mathbf{C}[x], \quad \deg(r) = 2n \quad n \in \mathbf{Z}$$

なる2階線形常微分方程式が初等解を持つ必要条件について述べるものであります。

## 21.2 準備

**定義 21.2.1.**

体$F$上の微分とは$F$から$F$への加法写像であって、以下の条件 (1) を満たすものである。$a, b \in F$ に対し、

$$(ab)' = a'b + ab' \tag{1}$$

**定義 21.2.2.**

体 $F$ に、ひとつ微分が定義されているとき、微分体であるという。

以下では、有理関数体 $\mathbf{C}(x)$ と微分 $' = \frac{d}{dx}$ のつくる体を基礎体とその拡大体しか考えない。

**定義 21.2.3.**

体 $F$ が $\mathbf{C}(x)$ 上の Liouville 拡大体であるとは、

$$\mathbf{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F$$

となる微分体の列が存在し、$i = 1, \cdots, n$ のそれぞれに対して、以下の 1,2,3 のいずれかが成り立つときである。

1. $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ $, \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$
   すなわち、$a(x) = \dfrac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$ とすれば、$\log \alpha = \displaystyle\int a(x)dx$,
   $\alpha = e^{\int a(x)dx}$。$F_i$ は、この $\alpha$ を $F_{i-1}$ に添加したものである。
2. $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ $, \alpha' \in F_{i-1}$
   すなわち、$a(x) = \alpha' \in F_{i-1}$ とすれば、$\alpha = \displaystyle\int a(x)dx$。
   $F_i$ は、この $\alpha$ を $F_{i-1}$ に添加したものである。
3. $F_i$ は $F_{i-1}$ の有限次代数拡大体。

**定理 21.2.4.** (Kovacic [2])

微分方程式

$$y'' = ry, \ r \in \mathbf{C}(x), \ r \notin \mathbf{C} \tag{2}$$

を考える。このとき、以下の Case 1 , 2 , 3 , 4 のいずれかひとつが成り立つ。

Case 1 (2) は $e^{\int \theta}$ 型の解を持つ。ここで、$\theta \in \mathbf{C}(x)$。

Case 2 (2) は $e^{\int \theta}$ 型の解を持つ。ここで、$\theta$ は $\mathbf{C}(x)$ の 2 次拡大体の元である。但し、1 の場合は除く。

Case 3 (2) の全ての解は $\mathbf{C}(x)$ 上代数的である。但し、1,2 の場合は除く。

Case 4 (2) は $\mathbf{C}(x)$ の Liouville 拡大体に解を持たない。

Liouville 拡大体に解があるとは、初等的に解けるということである。

**定義 21.2.5.**

$r$ を $r \in \mathbf{C}(x)$ とする。$s, t$ を $s, t \in \mathbf{C}[x]$ で互いに素であるとし、$r = \dfrac{s}{t}$ であるとする。

このとき、$r$ の極とは、$t$ の零点である。$r$ の極の位数とは、$t$ の零点の重複度である。すなわち、

$$\mathrm{ord}_c(r) = r\text{の極 } c \text{ での位数} \in \mathbf{N}$$

とする。

$\infty$ での $r$の位数とは、零点の位数の意味であって、$\deg t - \deg s$ とする。すなわち、

$$\mathrm{ord}_\infty(r) = \infty \text{ での } r\text{の位数} \in \mathbf{Z}$$

とする。

また、$r$の極の集合を$\Gamma$とする。

**定理 21.2.6.** (Kovacic [2])

定理 21.2.4. での Case 1,2,3 に対して、以下の対応する Condition 1,2,3 がそれぞれ必要条件である。

Condition 1　$r$が極を持つならば、すべての $r$の極に対して、

$$\mathrm{ord}_c(r) = 1 \text{ あるいは } \mathrm{ord}_c(r) = 2n \ (n \in \mathbf{N})$$

$$\mathrm{ord}_\infty(r) \geq 3 \text{ あるいは } \mathrm{ord}_\infty(r) = 4 - 2n \ (n \in \mathbf{N})$$

Condition 2　$r$は少なくとも 1 つの極を持ち、

$$\mathrm{ord}_c(r) = 2 \text{ あるいは } \mathrm{ord}_c(r) = 2n + 1 \ (n \in \mathbf{N})$$

Condition 3

$$\mathrm{ord}_c(r) \ \leq \ 2 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{ord}_\infty(r) \ \geq \ 2$$

$r$の部分分数展開を

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j}, \ (\sum_j \beta_j = 0)$$

とするとき、各 $i$ に対して、$\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbf{Q}$ , であるとわかる。さらに、

$$\gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j$$

とおくと、$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbf{Q}$ である。

**注意 21.2.7.**

(2) において、$r$が多項式の場合は 定理 21.2.6. の Condition 2 と 3 は満たさない。

微分方程式

$$y'' = ry, \quad r \in \mathbf{C}[x] \tag{3}$$

を考える。このとき、注意 21.2.7. と定理 21.2.4. より、この微分方程式の解は $e^{\int \theta}$, $\theta \in \mathbf{C}(x)$ 型の解を持つ。また、$r \in \mathbf{C}[x]$ であるから、

$$\theta = \omega + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x-\alpha_i}, \quad \omega \in \mathbf{C}[x]$$

であることが、文献 [2] の証明からわかる。よって、解$\eta$は、

$$\eta = Pe^{\int \omega}, \quad P \in \mathbf{C}[x], \omega \in \mathbf{C}[x]$$

と、表すことができる。

**注意 21.2.8.** 微分方程式 (3) が、初等解を持つならば、

$$\deg(r) = 2m \quad m \in \mathbf{N}$$

でなくてはならない。

**証明**

微分方程式 (3) において、$r \in \mathbf{C}[x]$ であるから、定理 21.2.6. の Condition 1 以外は満たさない。このとき、

$$\mathrm{ord}_\infty(r) = 4 - 2n = -\deg(r), \quad \deg(r) \in \mathbf{N}$$

よって、$\deg(r)$ が偶数のときのみ初等解を持ちうる。 ∎

Kovacic は、Case 1, 2, 3 ごとに解を求めるアルゴリズムを示している。ここでは、言及しないので文献 [2] を参考頂きたい。

**定理 21.2.9.** (Rehm [3])

$a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{C}$, $a_2 \neq 0$ とする。

このとき、微分方程式

$$y'' + (-a_2^2x^2 - 2a_1a_2x + a_0)y = 0$$

が、初等解を持つには、

$$\frac{a_1^2 + a_0}{a_2} = 2n + 1, \quad n \in \mathbf{N}$$

が、必要十分条件である。

この定理より、(3) において、$\deg(r)=2$ の場合に初等解を持つ必要十分条件が示されている。

## 21.3 初等解を持つ必要条件

微分方程式 (3) を考える。このとき、$\deg(r)=m,\quad m\in\mathbf{N}$ とする。また、初等解が存在すると仮定し、さらに解を

$$\eta = Pe^{\int\omega},\quad P,\omega\in\mathbf{C}[x]$$

とする。このとき、式 (3) に代入すると、

$$\begin{aligned}\eta'' &= (P''+2\omega P'+\omega' P+\omega^2 P)e^{\int\omega}\\ r\eta &= rPe^{\int\omega}\end{aligned}$$

ここで、$e^{\int\omega}$の最高次数に着目する。

$$\begin{aligned}\deg(P''+2\omega P'+\omega' P+\omega^2 P) &= 2\deg(\omega)+\deg(P)\\ \deg(rP) &= \deg(r)+\deg(P)\end{aligned}$$

となる。ゆえに、$\omega$は、$2\deg(\omega)=\deg(r)$ となる。

よって、微分方程式 $y''=ry$において、解$\eta=Pe^{\int\omega}$とすると、$r,\omega,P$は

$$r=\sum_{i=0}^{2m}a_ix^i,\quad \omega=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,\quad P=\sum_{i=0}^{n}q_ix^i$$

となる。

**定理 21.3.1.** (Y.)

2 階線形常微分方程式

$$y''=ry,\quad r=\sum_{i=0}^{2m}a_ix^i,\quad m\in\mathbf{N} \tag{4}$$

が、初等解$\eta$

$$\eta=Pe^{\int\omega},\quad \omega=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,\quad m\in\mathbf{N},\quad P=\sum_{i=0}^{n}q_ix^i,\quad n\in\mathbf{N} \tag{5}$$

を持つ必要条件は、

$$m+2n \;=\; \frac{a_{m-1}-\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} b_i b_{m-1-i}}{b_m}$$

なる整数条件が満たされることである。但し、各 $b_i$, $i=m,m-1,\cdots,0$ は、$a_j$, $j=2m,2m-1,\cdots,m-1$ で、表される。

**証明**

解$\eta$を微分方程式 (4) に代入する。

$$\begin{aligned}
\eta''-r\eta &= \Bigg(\Bigg((\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)^2-\sum_{i=0}^{2m} a_i x^i\Bigg)\sum_{i=0}^{n} q_i x^i \\
&\quad +\sum_{i=0}^{m} i b_i x^{i-1}\sum_{i=0}^{n} q_i x^i+2\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\sum_{i=0}^{n} i q_i x^{i-1} \\
&\quad +\sum_{i=0}^{n}(i^2-i)q_i x^{i-2}\Bigg)e^{\int\sum_{i=0}^{m} b_i x^i} \\
&= G(x)\cdot e^{\int\sum_{i=0}^{m} b_i x^i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$e^{\int\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}$の係数を $G(x)$ とする。$G(x)=0$ となるので、$G(x)$ を考察する。

$G(x)$ の $x$ の次数が $2m+n$ から $m+n$ までを考える。このとき、

$$\left((\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)^2-\sum_{i=0}^{2m} a_i x^i\right)\sum_{i=0}^{n} q_i x^i$$

だけを考えればよい。この式は、以下のように変形できる。

$$\left((\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)^2-\sum_{i=0}^{2m} a_i x^i\right)\sum_{i=0}^{n} q_i x^i \;=\; \sum_{l=0}^{2m+n}\sum_{k=0}^{l}(\sum_{i=0}^{k} b_i b_{k-i}-a_k)q_{l-k}x^l \tag{6}$$

このとき、$a_i=0\ (i>2m)$, $b_i=0\ (i>m)$, $q_i=0\ (i>n)$ である。また、(6) より、$x$ の次数が $2m+n$ から $m+n$ までは、

$$\sum_{k=0}^{l}(\sum_{i=0}^{k} b_i b_{k-i}-a_k)q_{l-k}=0$$

である。この式を、$l=2m+n-p$ とすると、以下のように変形できる。

$$\sum_{k=0}^{2m+n-p}(\sum_{i=0}^{k} b_i b_{k-i}-a_k)q_{2m+n-p-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=2m-p}^{2m+n-p} (\sum_{i=0}^{k} b_i b_{k-i} - a_k) q_{2m+n-p-k} \\
&= \sum_{k'=0}^{n} ( \sum_{i=0}^{k'+2m-p} b_i b_{k'+2m-p-i} - a_{k'+2m-p}) q_{n-k'} \\
&= \sum_{j=\max\{0,p-n\}}^{p} ( \sum_{i=0}^{2m-j} b_i b_{2m-j-i} - a_{2m-j}) q_{n-p+j} \\
&= \sum_{j=\max\{0,p-n\}}^{p} ( \sum_{i=m-j}^{m} b_i b_{2m-j-i} - a_{2m-j}) q_{n-p+j} \\
&= \sum_{j=\max\{0,p-n\}}^{p} (\sum_{i'=0}^{j} b_{m-j+i'} b_{m-i'} - a_{2m-j}) q_{n-p+j} \\
&= \sum_{j=\max\{0,p-n\}}^{p} C_j q_{n-p-j} \\
&= C_p q_n + c_{p-1} q_{n-1} + \cdots + C_0 q_{n-p} \quad (if i < 0,\ q_i = 0) \\
&= \sum_{i=0}^{p} C_i q_{n-p+i}
\end{aligned}
$$

但し、$\sum_{i'=0}^{j} b_{m-j+i'} b_{m-i'} - a_{2m-j} = C_j$とおいた。

このとき、$C_i = 0,\ i = 0, \cdots, m$ を帰納法で証明する。

$j = 0$ のとき、

$$C_0 q_n = (b_m^2 - a_{2m}) q_n = 0$$

$q_n \neq 0$ だから、$C_0 = b_m^2 - a_{2m}$

$j = 0, \cdots, p$ まで成り立っているとする。

$j = p + 1$ のとき、

$$\sum_{i=0}^{p+1} C_i q_{n-p-1+i} = C_0 q_{n-p-1} + \cdots + C_p q_{n-1} + C_{p+1} q_n = C_{p+1} q_n = 0$$

ゆえに、$C_{p+1} = 0$

また、$C_j = 0,\ j = 0, \cdots, m$ は、

$$
\begin{aligned}
C_j &= \sum_{i=0}^{j} b_{m-i} b_{m-j+i} - a_{2m-j} \\
&= b_m b_{m-j} + b_{m-1} b_{m-j+1} + \cdots + b_{m-j+1} b_{m-1} + b_{m-j} b_m - a_{2m-j}
\end{aligned}
$$

となっており、$b_i$は、$i = m, m-1, \cdots, 0$ の順に帰納的に $a_i$ で表すことができる。

$G(x)$ の $x$ の次数が $m+n-1$ を考える。このとき、

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} b_i b_{m-1-i} - a_k) q_{l-k} x^l + (m+2n) b_m q_n x^{m+n-1} \\
= \quad & ((m+2n) b_m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i b_{m-1-i} - a_{m-1}) q_n x^{m+n-1}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
m+2n = \frac{a_{m-1} - \sum_{i=0}^{m-1} b_i b_{m-1-i}}{b_m}
$$

となる。 ▮

# 21.4 例

ここでは、定理 21.3.1.の例を示す。

2 階線形常微分方程式 $y'' = ry$および、その初等解$\eta$は、それぞれ、定理 21.3.1.の仮定を満たすものとする。

**例 21.4.1.** 2 階線形常微分方程式 $y'' = ry$において、

$$
r = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x + 9
$$

を考える。このとき、$\frac{\deg(r)}{2} = \deg(\omega) = m = 2$ である。また、$\deg(P) = n = 1$ であるとする。$\eta = (q_1 x + q_0) e^{\int b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ を $y'' - ry = 0$ に代入する。なお、計算には、数式処理システムの MACSYMA を利用した。

$$
\begin{aligned}
& \eta'' - r\eta \\
= \quad & \left(q_1 b_2^2 - q_1\right) x^5 + \left(q_0 b_2^2 + 2 b_1 q_1 b_2 - 6 q_1 - q_0\right) x^4 \\
& + \left((2 b_0 q_1 + 2 q_0 b_1) b_2 + \left(b_1^2 - 9\right) q_1 - 6 q_0\right) x^3 \\
& + \left((4 q_1 + 2 b_0 q_0) b_2 + (2 b_0 b_1 - 4) q_1 + q_0 b_1^2 - 9 q_0\right) x^2 \\
& + \left(2 q_0 b_2 + \left(3 b_1 + b_0^2 - 9\right) q_1 + 2 b_0 q_0 b_1 - 4 q_0\right) x \\
& + 2 b_0 q_1 + q_0 b_1 + \left(b_0^2 - 9\right) q_0 \, e^{\frac{b_2 x^3}{3} + \frac{b_1 x^2}{2} + b_0 x} \\
= \quad & G(x) e^{\frac{b_2 x^3}{3} + \frac{b_1 x^2}{2} + b_0 x}
\end{aligned}
$$

$G(x) = 0$ となるので、$G(x)$ の $x^i$, $i = 0, 1, \cdots, 5$ の係数を取り出して考える。ここで、$C_i =$

$G(x)$ の $x^i$の係数 とする。

$$
\begin{aligned}
C_5 &= q_1\, b_2^2 - q_1 \\
C_4 &= q_0\, b_2^2 + 2\, b_1\, q_1\, b_2 - 6\, q_1 - q_0 \\
C_3 &= (2\, b_0\, q_1 + 2\, q_0\, b_1)\, b_2 + \left(b_1^2 - 9\right)\, q_1 - 6\, q_0 \\
C_2 &= (4\, q_1 + 2\, b_0\, q_0)\, b_2 + (2\, b_0\, b_1 - 4)\, q_1 + q_0\, b_1^2 - 9\, q_0 \\
C_1 &= 2\, q_0\, b_2 + \left(3\, b_1 + b_0^2 - 9\right)\, q_1 + 2\, b_0\, q_0\, b_1 - 4\, q_0 \\
C_0 &= 2\, b_0\, q_1 + q_0\, b_1 + \left(b_0^2 - 9\right)\, q_0
\end{aligned}
$$

となり、$C_5 = 0,\ C_4 = 0,\ C_3 = 0$ より、

$$\{\{b_2 = -1, b_1 = -3, b_0 = 0\}, \{b_2 = 1, b_1 = 3, b_0 = 0\}\}$$

であることがわかる。

ここで、定理 21.3.1.の必要条件は、$m = 2,\ n = 1$ であったから、

$$\frac{a_1 - \sum_{i=0}^{1} b_i b_{i-1}}{b_2} = \frac{4-0}{1} = 4 = 2 + 2i$$

となり、必要条件を満たしている。

また、$C_2 = 0,\ C_1 = 0,\ C_0 = 0$ を満たす $P$は、未定係数法により $P\ = qx,\quad \forall q \in \mathbf{C}$ であるとわかる。$\eta = qxe^{\int x^2+3x}$が解である。

# 参考文献


[1]I. Kaplansky. An Introduction to Differential Algebra. Hermann, 1957.

[2]Jerald J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. J. Symbolic Computation., Vol. 2, pp. 3–43, 1986.

[3]Hans Peter Rehm. Galois groups and elementary solutions of some linear differential equations. J. Reine Angew. Math. 307/308 , 1–7, 1979.

[4]Minoru Setoyanagi. Liouvillian solutions of the differential equation y"+S(x)y = 0 with S(x) binomial. Priceedings of the American Mathematical Society. Vol.100, 607–612 , 1987.